2.1.11. Teorema. ([War]; página 225) El Kernel del Laplaciano $\triangle$ en $E^p(M)$ es isomorfo a $H^p_{de\ Rham}(M)$.

2.2. La Diferencial y El Laplaciano de Witten

2.2.1. Definición. Sean M una variedad diferenciable y $f: M \to \mathbb{R}$ una función suave. Si d es la derivada exterior de formas diferenciales, definimos $d_t = e^{-tf} \circ d \circ e^{tf}: E^p(M) \to E^p(M)$ para $t \in \mathbb{R}$. El operador d_t se llama la diferencial de Witten.

Obsérvese que $d_t \circ d_t = 0$, con lo cual la familia $C^*_t(M) = \{E^p(M), d_t\}$ es un complejo de co-cadenas. Como Witten observa $H^p(C^*_t(M))$ es claramente isomorfo a $H^p(C^*(M))$. (Recordemos que $C^*(M) = \{E^p(M), d\}$).

2.2.2. Definición. Sean M una variedad diferenciable de dimensión n y $f: M \to \mathbb{R}$una función suave. Definimos $\delta_t = e^{tf}\ \delta e^{-tf}$ y $\triangle_t = \delta_t d_t + d_t \delta_t$ para $t \in \mathbb{R}$. El operador $\triangle_t$ se llama el Laplaciano de Witten. Se puede demostrar, como se afirma en [Henn] y [Ree], que el Kernel de $\triangle_t$ en $E^p(M)$ es isomorfo al Kernel de $\triangle$ en $E^p(M)$. Luego por el Teorema 2.1.11, el Kernel de $\triangle_t$ en $E^{p(M)}$ es isomorfo a $H^p_{de\ Rham}(M)$ para cada p.

Ahora nos ocuparemos de una descripción distinta de la diferencial de Witten. Nuestro objetivo será encontrar un modelo local para el Laplaciano de Witten, lo más sencillo posible.

Si $w \in E^k(M)$, podemos definir un operador lineal $E_W: E^p(M) \to E^{p+k}(M)$ por $E_W(v) = w \wedge v$. El operador E_W se llama multiplicación por la izquierda. Con la ayuda de este operador, escribimos la diferencial de Witten como $d_t = d + t\ E_{df}$, pues si $\gamma \in E^p(M)$, entonces

$d_t(v)= e^{-tf} \circ d \circ e^{tf}v= e^{-tf}(de^{tf} \wedge v + e^{tf} \wedge dv)= e^{-tf}(te^{tk}\, df \wedge v + e^{tf} \wedge dv)= tdf \wedge v + dv=$ $(d+t\, E_{df})(v)$.

Antes de describir a Δ_t necesitamos un lema algebraico. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, con producto interno $< , >$. Dado $w \in \Lambda_1(V)$ tenemos que $E_w: \Lambda_r(V) \to \Lambda_{r+1}(V)$ y consideremos su adjunto, $I_W: \Lambda_{r+1}(V) \to \Lambda_r(V)$. En realidad $I_W: \Lambda_{r+1}(V)^* \to \Lambda_r(V)^*$, donde la estrella denota el dual del espacio, pero identificamos $\Lambda_r(V)$ con $\Lambda_r(V)^*$ mediante el isomorfismo inducido por el producto interno $< , >$ de $\Lambda_r(V)$ como se define en 2.1.4.

Obsérvese que el inverso de este isomorfismo es:

$f \in \Lambda_r(V)^*\ 3f \to \Sigma\, f(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r})\, e_{i_1} \wedge \dots e_{i_r}$ donde $\{e_i\}$ es una base ortonormal de V y $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}\}$ es la base correspondiente de $\Lambda_r(V)$.

2.2.3. <u>Lema.</u> Con la notación del parágrafo anterior:

$E_w I_n + I_n E_w= \langle w,n\rangle$ para todo $w,n \in \Lambda_1(V)= V$. Aquí consideramos a $\langle w,n\rangle$ como un operador de $\Lambda_r(V)$ en $\Lambda_r(V)$ que aplicado a un elemento de $\Lambda_r(V)$, es el producto por el escalar $\langle w,n\rangle$.

Demostración: Sea $e_1,\dots e_n$ una base ortonormal de V. Primero demostremos el lema para $w= e_i$, $n= e_j$. Basta demostrar que $(E_W I_n + I_n E_W)\, (e_{i_1} \wedge \dots \wedge_{ir})= \langle w,n\rangle\, e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ donde el conjunto $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}\}$ es la base correspondiente de $\Lambda_r(V)$.

Calculemos:

$E_{e_i}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{ir})= e_i \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{ir}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{i_1, \dots i_r\} \\ e_i \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora calculemos $I_{e_j}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{ir+1})$. Utilizando el isomorfismo entre $\wedge_p(V)^*$ y $\wedge_p(V)$, le asociamos al elemento $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{ir+1}$ su dual f. Luego $I_{e_j}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{r+1}})$

$= \Sigma\, I_{e_j}(f)\,(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r})\, e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r}$

$= \Sigma\, f(e_j \wedge e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r})\, e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin \{i_1, \dots i_{r+1}\}r \\ \mathrm{Sgn}\Pi_1\, e_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{ik} \wedge \dots \wedge e_{i_{r+1}} & \text{si } j = i_k. \end{cases}$$

El gorro sobre e_{i_k} significa que debe omitirse. Y donde Π_1 es la permutación obvia.

Entonces $I_{e_j}E_{e_i}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = I_{e_j}(e_i \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r})$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{i_1, \dots i_r\} \\ (\mathrm{Sgn}\Pi_2)\, I_{e_j}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_i \wedge \dots \wedge e_{ir}) & \text{si } i \notin \{i_1, \dots i_r\} \text{ y } \Pi_2 \text{ es la permutación indicada.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{i_1, \dots i_r\} \\ 0 & \text{si } j \notin \{i_1, \dots i, \dots i_r\},\ i \notin \{i_1, \dots i_r\} \\ \mathrm{Sgn}\Pi_2\, \mathrm{Sgn}\Pi_3\, (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_i \wedge \hat{e}_j \wedge \dots e_{ir}) & \text{donde } \Pi_3 \text{ es la permutación obvia. } i \notin \{i_1, \dots i_r\},\ j \in \{i_1, \dots i, \dots i_r\} \end{cases}$$

$$\text{Ahora } E_{e_i} I_{e_j}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin \{i_1, \dots i_r\} \\ \mathrm{Sgn}\Pi_4\, e_i \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{ik} \wedge \dots \wedge e_{ir} & \text{si } j = ik \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin \{i_1, \dots i_r\} \\ 0 & \text{si } j \in \{i_1, \dots i_r\},\ i \in \{i_1, \dots \hat{i}_k, \dots i_r\} \\ \mathrm{Sgn}\Pi_4\, \mathrm{Sgn}\Pi_5\, e_{i_1} \wedge \dots e_i \wedge \dots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \dots e_{i_r} & \text{si } i \notin \{i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots i_r\},\ j = i_k \end{cases}$$

Para terminar calculemos $(E_{e_i}I_{e_j} + I_{e_j}E_{e_i})(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r})$ cuando $i \neq j$ y cuando $i = j$.

Si $i \neq j$ entonces $(E_{e_i} I_{e_j} + I_{e_j}E_{e_i})(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = 0$ excepto posiblemente cuando $j \in \{i_1, \dots i_r\}$, $i \notin \{i_1, \dots i_r\}$.

En este caso el resultado es:

$$(*) \qquad \mathrm{Sgn}\Pi_2\ \mathrm{Sgn}\Pi_3\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_i \wedge \dots \wedge \hat{e}_j \wedge \dots \wedge e_{i_r} + \mathrm{Sgn}\Pi_4\ \mathrm{Sgn}\Pi_5\ (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_i \wedge \dots \wedge \hat{e}_j \wedge \dots e_{i_r}).$$

Ahora recordamos qué son $\Pi_2, \Pi_3 \Pi_4, \Pi_5$.

Π_2 es la permutación $(i, i_1, \dots i_r) \to (i_1, \dots i_\alpha, i, i_{\alpha+1}, \dots i_r)$ de tal manera que $i_\alpha < i < i_{\alpha+1}$

Π_3 es la permutación $(j, i_1, \dots \hat{i}_k, \dots i_\alpha i, i_{\alpha+1}, \dots i_r) \to (i_1, i_2, \dots \underset{j=i_k}{j}, i_p, \dots i_\alpha, i, i_{\alpha+1}, \dots i_r)$

Π_4 es la permutación $(j, i_1, \dots \hat{i}_k, \dots i_r) \to (i_1, \dots \underset{j=i_k}{j}, \dots i_r)$

Π_5 es la permutación $(i, i_1, \dots \hat{i}_k, \dots i_r) \to (i_1, \dots i, \dots i_k, \dots i_r)$

Para terminar el caso $i \neq j$ con $j \in \{i_1, \dots i_r\}$, $i \notin \{i_1, \dots i_r\}$ lo dividimos en $i<j$ y $j<i$. Si $i<j$ entonces $\mathrm{Sgn}\Pi_2 = \mathrm{Sgn}\Pi_5$ y $\mathrm{Sgn}\ \Pi_3 = -\mathrm{Sgn}\Pi_4$ luego la suma (*) es igual a cero.

Si $j<i$ entonces $\mathrm{Sgn}\Pi_3 = \mathrm{Sgn}\Pi_4$ y $\mathrm{Sgn}\Pi_2 = -\mathrm{Sgn}\Pi_5$. Luego la suma (*) es igual a cero. Esto completa el caso $i \neq j$. Ahora supongamos $i = j$. Y consideramos los casos $i,j \notin \{i_1, \dots i_r\}$ e $i,j \in \{i_1, \dots i_r\}$. En el primer caso:

$$(E_{e_i}I_{e_i} + I_{e_i}E_{e_i})(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{ir}) = I_{e_i}E_{e_i}\ (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r})$$

$$= \mathrm{Sgn}\Pi_2\ \mathrm{Sgn}\Pi_3\ (e_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_{i_r}) \text{ y } \mathrm{Sgn}\Pi_2 = \mathrm{Sgn}\Pi_3$$

luego $(E_{e_i}I_{e_i} + I_{e_i}E_{e_i})(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$.

Cuando $i,j \in \{i_1, \dots i_r\}$ entonces $(E_{e_i}I_{e_i} + I_{e_i}E_{e_i})(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r})$

$$= E_{e_i}I_{e_i}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = \mathrm{Sgn}\Pi_4\ \mathrm{Sgn}\Pi_5\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \text{ y}$$

$\mathrm{Sgn}\Pi_4 = \mathrm{Sgn}\Pi_5$ luego $(E_{e_i}I_{e_i} + I_{e_i}E_{e_i})\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$

En conclusión: $(I_{e_j}E_{e_i} + E_{e_i}I_{e_j})\, e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} = \delta_{ij} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$ donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Y por lo tanto el lema es válido para $w= e_j$, $n= e_j$. El lema se sigue ahora de la bilinealidad de $<\,,\,>$ y de $E_W In + In\, e_W$. □

Ahora bien dado $w \in E^1(M)$, podemos considerar I_W : como un operador entre $E^p(M)$ y $E^{p-1}(M)$. Por la propiedad c) del operador estrella de Hodge, es fácil ver que Iw es el adjunto de E_w en $E(M)$, con el producto interno definido en 2.1.9. Luego si $d_t = d + t\, E_{df}$, entonces $\delta_t = \delta + t\, I_{df}$ y por lo tanto $\triangle_t = d_t\, \delta_t + \delta_t d_t = \triangle + t(dI_{df} + E_{df}\,\delta + I_{df}\, d + \delta E_{df}) + t^2\, \|df\|^2$, donde hemos obtenido el último término utilizando el lema anterior. Se puede verificar que en coordenadas locales $(U;\, x_1, \ldots x_n)$ el operador $dI_{df} + E_{df}\,\delta + I_{df}\, d + \delta E_{df}$ se reduce a $\sum_{i,j} \frac{D^2 f}{Dx_i Dx_j}\left(E_{dx_i}\, I_{dx_j} - I_{dx_j}\, E_{dx_i}\right)$, donde $\frac{D^2 f}{DX_i DX_j}$ es la segunda derivada covariante de f (Apéndice III).

2.3. El Oscilador Armónico y El Espectro del Laplaciano

En esta sección consideramos ciertos operadores que aparecen en la física moderna. Consideremos el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ y $D = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}):\ \lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0,\ x^n f \in L^2(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}\}$. Es claro que D es denso en $L^2(\mathbb{R})$, porque D contiene a todas las funciones suaves de soporte compacto. Dado $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ definimos los operadores H_t, a_t^+, a_t^- : $D \to L^2(\mathbb{R})$ mediante las fórmulas $H_t = -\frac{d^2}{dx^2} + t^2x^2$, $a_t^+ = \frac{d}{dx} - tx$, $a_t^- = -\frac{d}{dx} - tx$.

En la literatura de la física, el operador H_t representa el Hamiltoniano de una partícula bajo un potencial V, de la forma $V= kx^2$, donde k es una constante positiva. Los valores propios de H_t representan las energías posibles de la partícula.

Ahora nos dedicaremos a calcular el espectro de H_t. El resultado final aparecerá en el Teorema 2.3.1

Es fácil verificar las siguientes propiedades:

a) $a_t^- a_t^+ = H_t + t$, $a_t^+ a_t^- = H_t - t$

b) $[H_t, a_t^\pm] = \pm 2ta_t^\pm$, donde [,] es el conmutador de operadores

c) $\langle a_t^+\varphi,\psi\rangle = \langle\varphi, a_t^-\psi\rangle$, $\langle H_t\,\varphi, \psi\rangle = \langle\varphi, H_t\psi\rangle$ para todo φ, $\psi \in D$.

Sea ahora $\varphi \in D$ tal que $\|\varphi\| = 1$ y $H_t(\varphi) = \lambda_t\varphi$, entonces
$H_t(a_t^\pm\varphi) = \left([H_t, a_t^\pm] + a_t^\pm H_t\right)\varphi = (\pm 2ta_t^\pm + \lambda_t a_t^\pm)\varphi = (\lambda_t \pm 2t)(a_t^\pm\varphi)$, y
$\|a_t^+\varphi\|^2 = \langle a_t^+\varphi, a_t^+\varphi\rangle = \langle a_t^- a_t^+ \varphi, \varphi\rangle = \langle (H_t + t)\,\varphi_1\varphi\rangle = \lambda_t + t$. De igual manera calculamos $\|a_t^-\varphi\|^2 = \lambda$-t. Observemos que los valores propios de H_t son reales positivos: $\lambda_t = \langle H_t\varphi,\varphi\rangle = \langle a_t^+a_t^-\varphi + t\varphi, \varphi\rangle = \|a_t^-\varphi\|^2 + t > 0$, porque $t>0$.

En conclusión: si φ es una función propia de H_t con $\|\varphi\| = 1$ y valor propio λ_t, entonces $\lambda_t \in \mathbb{R}$, $\lambda_t>0$ y $a_t^\pm$ y es una función propia de H_t con valor propio $\lambda_t \pm 2t$ y $\|a_t^\pm\varphi\|^2 = \lambda_t \pm t$.

De aquí concluímos que $\lambda_t \geq t$ y que $\lambda_t \notin \left(tk, (k+1)t\right)$ para k= 1,2,... . Demostremos que t es un valor propio de H_t y por lo tanto los únicos valores propios de H_t son $\lambda_t = (2k+1)t$ para k= 0,1,...
Queremos encontrar una solución de $-\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + t^2x^2\varphi = t\varphi$. Una solución de esta ecuación es $\varphi_0 = C_0 e^{-\frac{tx^2}{2}}$ donde C_0 se escoge de tal manera que $\|\varphi_0\| = 1$. Es obvio que $\varphi_0 \in D$, y se puede demostrar que φ_0 es la única solución en $L^2(\mathbb{R})$ ([Smi] ; página 584).

Tenemos entonces que H_t tiene valores propios $\lambda_t = (2k+1)t$ para k= 0,1,2,... con funciones propias correspondientes $\varphi_k = C_k(a_t^+)^k\varphi_0$ donde C_k es una constante, tal que $\|\varphi_k\| = 1$.

Ahora bien, H_t es un operador simétrico, por lo tanto las funciones φ_k son ortogonales porque los valores propios son distintos entre sí.

2.3.1. Teorema Con la misma notación anterior, los únicos valores propios y funciones propias en $L^2(\mathbb{R})$ de H_t son $\lambda_t = (2k+1)t$ para $k = 0,1,\ldots$ con funciones propias $\varphi_k = C_k (a_t^+)^k \varphi_0$ donde C_k es una constante tal que $\|\varphi_k\| = 1$ y además las funciones φ_k son ortogonales en $L^2(\mathbb{R})$.

Consideremos ahora el Laplaciano de Witten para la función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1,\ldots x_n) = \frac{1}{2}(-x_1^2 \ldots x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2)$. En el Apéndice III se demuestra que la segunda derivada covariante de f se reduce

en este caso a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ -1 & \text{si } i = j \leq k \\ 1 & \text{si } i = j > k \end{cases}$

por otra parte $\|df\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ y $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(-\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$, luego

$$\Delta_t = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + t^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(E_{dx_i} I_{dx_i} - I_{dx_i} E_{dx_i}\right), \text{ donde } \alpha_i = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 1 & \text{si } k < i \leq n \end{cases}$$

Tomando $L_i = -\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} + t^2 x_i^2$, $K_i = \alpha_i (E_{dx_i} I_{dx_i} - I_{dx_i} E_{dx_i})$, $L = \sum_{i=1}^{n} L_i$ y $K = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K_i$.
Podemos expresar el Laplaciano $\Delta_t = L + tK$.

Calculemos ahora las funciones propias de los operadores L_i en $E^p(\mathbb{R}^n)^{(*)}$: L_i actúa como la identidad sobre elementos de la forma $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, donde $1 \leq i < \ldots < i_p \leq n$. Luego L_i

tiene funciones propias ψ_{r_i} como en el Teorema 2.3.1: $\psi_{r_i}(x_i) = Cr_i\, (a_t^+)^{r_i} e^{\frac{-tx_i^2}{2}} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, con valores propios $\lambda_t = (2r_i + 1)t$.

Se sigue que L tiene funciones propias de la forma $\psi_{r_1}(x_1) \ldots \psi_{r_n}(x_n)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$. con valores propios $\Big(n + 2(r_1 + \ldots + r_n)\Big)\, t$.

(*) En realidad solo nos interesan las formas diferenciales "$L^2(\mathbb{R}^n)$integrables".

Para el caso de los operadores K_i, consideremos el comportamiento sobre elementos de la forma $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ (obsérvese que K_i actúa como la identidad sobre funciones, luego los K_i y los L_i conmutan). Es fácil ver que (demostración del lema 2.2.3):

$$K_i (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}) = \begin{cases} -dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, & \text{si } i \in \{i_1, \ldots i_p\},\ i \in \{1,\ldots k\} \\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, & \text{si } i \in \{i_1, \ldots i_p\},\ i \notin \{1,\ldots k\} \\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, & \text{si } i \notin \{i_1, \ldots i_p\},\ i \in \{1,\ldots k\} \\ -dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, & \text{si } i \notin \{i_1, \ldots i_p\},\ i \notin \{1,\ldots k\} \end{cases}$$

2.3.2 Lema Supongamos que $K(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}) = \alpha dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$. Entonces $\alpha = 2k+2p-n-4s$, donde s es el cardinal de $\{i_1, \ldots i_p\} \cap \{1,\ldots k\}$.

Demostración: El número de términos negativos que aparecen en la suma $\sum_{i=1}^{n} K_i$ es: $s + \big((n-p) - (k-s)\big) = 2s + n-p-k$, y el número de términos positivos es: $(p-s) + (k-s) = p+k-2s$. Luego $\alpha = 2p+2k-n-4s$. □

Nota: $s \leq p$, $s \leq k$ luego $\alpha = 2(p+k-2s)-n \geq -n$

2.3.3. Teorema El Kernel de $\Delta_t : E^p(\mathbb{R}^n) \to E^p(\mathbb{R}^n)$, tiene dimensión uno si $p = k$ y cero en los otros casos.

Demostración: Los valores propios de Δ_t son: $\lambda_t = t\big(n+\alpha+2(r_1+\ldots+r_n)\big)$. Como $\alpha \geq -n$ entonces $\lambda_t \geq 0$. Ahora para que $\lambda_t = 0$, necesitamos que $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ y $n = -\alpha$, luego $p+k = 2s$, pero $p \leq s$ y $k \leq s$ luego $P = k = s$. Se sigue que $\psi_0(x_1) \ldots \psi_0(x_n)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$ es una base para el Kernel de Δ_t cuando $P=k$. □

2.4. El Teorema de Localización

Con la ayuda del Teorema de Localización podemos finalmente exponer la demostración de Witten.

Recordemos que si Δ es el laplaciano, entonces sus valores propios en $E^p(M)$ se pueden ordenar así: $\lambda_1^p \leq \lambda_2^p$ ..., donde permitimos que un valor propio se repita tantas veces como la dimensión del eigenespacio correspondiente ([War]; página [illegible]). De igual manera podemos ordenar los valores propios del Laplaciano de Witten en $E^p(M)$: $\lambda_1^p(t) \leq \lambda_2^p(t) \leq \ldots$ ([Henn] página 46).

2.4.1. <u>Teorema de Localización</u> ([Sim]) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, compacta y orientada. Sean $f\colon M \to \mathbb{R}$ una función de Morse con $q_1, \ldots q_\alpha$ puntos críticos y Δ_t el laplaciano de Witten con valores propios $\lambda_1^p(t) \leq \lambda_1^p(t) \leq \ldots$ Sea $W_i\colon E^p(M) \to E^p(M)$ para $i= 1,2,\ldots\alpha$ el Laplaciano de Witten de la función $h_i= -x_1^2, \text{-}\ldots\text{-}\, x_{k_i}^2 + x_{k_{i+1}}^2 + \ldots x_n^2$ donde k_i es el índice del punto crítico q_i de f. Definamos ahora el operador W: $\bigoplus_{i=1}^{\alpha} E^p(M) \to \bigoplus_{i=1}^{\alpha} E^p(M)$ como $W= \bigoplus_{i=1}^{\alpha} W_i$ y sea $\mu_1^p \leq \mu_2^p \leq \ldots$ sus valores propios divididos por t. Es decir, la sucesión $\mu_1^p \leq \mu_2^p \leq \ldots$ no es más que la ordenación de la unión de los valores propios de cada W_i. Entonces $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\lambda_i^p(t)}{t} = \mu_i^p$.

Ahora bien la multiplicidad del valor propio cero de W en $E^p(M)$ es cero si $p \notin \{k_1, \ldots, k_\alpha\}$, y es igual al número de puntos críticos de índice k_i, si $p= k_i$. Luego el número de valores propios λ_t^p tales que $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\lambda_t^p}{t} = 0$ es igual al número de puntos críticos de índice k_i, si $p= k_i$ y es cero en los otros casos.

Sea ahora $C^p(M)$ el espacio generado por los vectores propios de Δ_t en $E^p(M)$ tales que sus valores propios correspondientes λ_t^p satisfagan: $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\lambda_t^p}{t} = 0$. De acuerdo con la observación anterior, la dimensión de C^p es γ_p (el número de puntos críticos de índice p).

Obsérvese que el Kernel de Δ_t en $E^p(M)$ está contenido en $C^p(M)$, y como este Kernel es isomorfo a $H^p_{\text{De-Rham}}(M)$, entonces la dimensión $\left(H^p_{\text{De-Rham}}(M)\right) \leq \gamma_p$. Pero según el Teorema de De-Rham, la dimensión $\left(H^p_{\text{De-Rham}}(M)\right) =$ dimensión $\left(H_p(M)\right)$, luego la dimensión

$\left|H_p(M)\right| \leq \gamma_p$ para cada p. Esta es una de las desigualdades de Morse. Más aún, como se afirma en [Ree], se puede demostrar este

2.4.2. Lema Con la misma notación anterior, la familia $\{C^p(M),\ d_t\}_{p \in \mathbb{N}}$ es un complejo de cocadenas, cuya cohomología es isomorfa a la cohomología de De-Rham.

Para terminar, observemos lo siguiente. El lema 1.6.1 y el corolario 1.6.2 tienen un análogo para complejos de cocadenas, que se prueban de igual manera. Aplicando este corolario a la familia $\{C^p(M),\ d_t\}_{p \in \mathbb{N}}$ y utilizando el lema 2.4.2 y el Teorema de De-Rham, se obtienen fácilmente las desigualdades de Morse.

REFERENCIAS

[Au-Ma] Auslander L. y Mackenzie R. Introduction to Differentiable Manifolds. McGraw-Hill. 1963.

[Br-Cl] Brickell F. y Clark R. Differentiable Manifolds, An Introduction. Van Nostrand Reinhold Company. 1970.

[Gui-Po] Guillemin V y A. Pollack. Differential Topology. Prentice-Hall. 1974.

[Henn] Henniart G. "Les Inégalites de Morse". Séminaire Bourbaki (1983-1984). No. 617.

[Hi] Hirsch M. Differential Topology Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. 1976.

[Mi] Milnor, J. Morse Theory. Princeton University Press. 1963.

[Mu] Munkres, J. Elements of Algebraic Topology. Addison-Wesley Publishing Company. 1984.

[Ree] Rees, E. "Introduction to Morse Theory". International Center for Theoretical Physics. College on Global Geometric and Topolgical Methods in Analysis. Nov. 21-Dic. 16, 1988. Lecture Notes.

[Sim] Simon B. "Semiclassical Analysis of Low Lying Eigenvalues". Ann. Inst. Henri Poincaré. Vol. 38 (1983) páginas 295-307.

[Smi] Smirnor V.I. A Course in Higher Mathematics. Pergamon Press. Vol. III. Parte II.

[War] Warner, F. Introduction to Differentiable Manifolds and Lie Groups. Scott, Foresman and Company. 1971.

[Wh-G] Whitehead. G. W. Elements of Homotopy Theory. Graduate Texts in Mathematics Springer-Verlag. 1978.

$[Wh.J]_1$ Whitehead J.H.C. "Combinatorial Homotopy I". Bulletin of the American Mathematical Society, Vol 55 (1949) páginas 213-245.

$[Wh.J]_2$ Whitehead J.H.C. "On Simply Connected. 4 dimensional Polyhedra" Commentari Mathematici Helvetici. Vol. 22 (1949).

[Witt] Witten E. "Supersymmetry and Morse Theory". Journal of Differential Geometry. 17 (1982).

SIMBOLOS

$\mathbb{N}$	Números naturales, incluído el cero
$\mathbb{Z}$	Números enteros
$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$	Grupo de orden dos
$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	
B^n	Bola de dimensión n
$I = [0,1]$	
M_q	Espacio tangente en q
M_q^*	Dual del espacio vectorial M_q
$\mathfrak{X}(M)$	Campos de Vectores suaves sobre M
$C^\infty(M)$	Funciones suaves de M en $\mathbb{R}$
$[\ ,\ ]$	Corchete de Lie o clase de equivalencia
δ^i_j	$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$
δ_{ij}	$\delta_{ij} = \delta^i_j$
id_X	Función identidad del conjunto X
$\approx$	Homeomorfismo o Tipo de Homotopía
$\Vert\ \Vert$	Denota la norma usual de un vector en $\mathbb{R}^n$
$Supp(f)$	Soporte de la función f
$\equiv$	Definición

APENDICE I. FORMAS BILINEALES

Sean V un espacio vectorial de dimensión n y b: $V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.

<u>Definición</u>. La forma bilineal b se dice que es no-degenerada si se cumple alguna de las condiciones:

a) Para todo $v \in V$, existe un $w \in V$ tal que $b(v,w) \neq 0$.

b) Para todo $w \in V$, existe un $v, \in V$ tal que $b(v,w) \neq 0$.

c) Dada una base $e_1,\ldots e_n$ de V, la matriz $(b_{ij}) = \left(b(e_i,e_j)\right)$ es no singular.

Demostremos que a), b) y c) son equivalentes. Sea $e_1,\ldots e_n$ cualquier base de V y $e^1,\ldots e^n$ la base correspondiente de V^*, el espacio dual de V. Definamos la aplicación f: $V \to V^*$ por la fórmula $f(v) = b(v,.)$, entonces la matriz $(b_{ij}) = \left(b(e_i,e_j)\right)$ es la matriz de la aplicación f con respecto a las bases $\{e_i\}$, $\{e^i\}$. Luego (b_{ij}) es no-singular ssi a) se cumple. La demostración de que b) y c) son equivalentes es similar.

<u>Nota</u> De la parte c) resulta que b es no degenerada ssi para alguna base $f_1,\ldots f_n$ de V, la matriz $(b_{ij}) = \left(b(f_i,f_j)\right)$ es no-singular. Luego nuestra definición de que H_f es no degenerada es automáticamente independiente del sistema de coordenadas.

<u>Definición.</u> Sea W un subespacio de V. Decimos que b es definida negativa en W si $b(w,w)<0$ para todo $w \in W$, $w \neq 0$. La forma bilineal b se llama simétrica si $b(x,y) = b(y,x)$ para todo $x,y \in V$.

<u>Teorema</u>. Sean V un espacio vectorial de dimensión n y b una forma bilineal simétrica sobre V. Entonces existe una base $e_1,\ldots e_n$ tal que $b(e_i,e_j) = 0$ si $i \neq j$, y $b(e_i,e_i) = 0,1$ ó -1. El número de ceros, unos y menos unos, son un invariante de b. El número de menos unos, se llama el índice de b.

Demostración: Supongamos $b \neq 0$. Entonces existe un $v \in V$ tal que $b(v,v) \neq 0$ (pues como $b \neq 0$, existen v, $w \in V$ tales que $b(v,w) \neq 0$, luego si $b(v,v)= b(w,w)= 0$ entonces $b(v + w, v+w) \neq 0$). Sea $e_n = \frac{v}{\sqrt{|b(v,v)|}}$ Si $n= 1$ esta es la base que buscabamos. Supongamos que el teorema es válido para $k= 1,\dots n-1$ y demostremos que se cumple para $k= n$. Sea $W= \{w \in V: b(v,w)= 0 \text{ para todo } v \in V\}$, entonces $1 \leq$ dimensión $(W)<n$, porque $e_n \notin W$. Utilizando la hipótesis de inducción, sean $e_1,\dots e_m$ una base para W con las propiedades deseadas y $X \in V$, entonces $\left(X\text{-}b(e_n,e_n).\ b(X,e_n)e_n\right) \in W$ como se verifica fácilmente, luego $X= \sum_{i=1}^{m} a_ie_i + b(e_n,e_n)\ b(X,e_n)e_n$.

En conclusión el conjunto $e_1,\dots e_k$, e_n genera a V, luego $k=n-1$ y $e_1\dots e_n$ es la base que buscabamos.

Demostremos ahora que el número de menos unos es un invariante de b, pues corresponde a la dimensión de algún subespacio maximal W de V donde b es definida negativa.

Supongamos entonces que W es un subespacio maximal de V donde b está definida negativa. Numeremos la base $e_1,\dots e_n$ de tal manera que $b(e_1,e_1)= \dots = b(e_k,e_k)= -1$ y $b(e_i,e_i) \neq -1$ para $i>k$. Es claro que b es definida negativa en el espacio generado por $e_1,\dots e_k$, luego $k \leq$ dimensión (W). Sea $[e_1,\dots e_k]$ el espacio generado por $e_1,.\ e_k$ y definamos $T: W\rightarrow[e_1,\dots e_k]$ por $T(w)= \sum_{i=1}^{k} w_ie_i$, donde $w= \sum_{i=1}^{n} w_ie_i$. Calculemos el Kernel de T: Si $T(w)= 0$ entonces $w_1= w_2= \dots = w_k= 0$, pero como $w \in W$ entonces $b(w,w)= \sum_{i=k+1}^{n} w_i^{\,2}\ b(e_i,e_i) \leq 0$, luego $w_{k+1}= \dots = w_n= 0$. Por consiguiente T es 1-1 y esto implica que $k \geq$ dimensión (w). □

<u>Nota</u> Sea $f_1,\dots f_n$ cualquier base de V y b una forma bilineal simétrica sobre V. El número de valores propios negativos de la matriz $\left(b(f_i,f_j)\right)$ es igual al índice de b.

APENDICE II. VARIEDADES COCIENTES

Sean M, N variedades diferenciables y μ: M→N una función suave. Se dice que μ es una sumersión si para todo $m \in M$, $d\mu|_m$ es sobreyectiva (es decir si $d\mu|_m$ tiene rango igual a la dimensión de N). Dado ρ una relación de equivalencia en M, denotamos por M/ρ el conjunto de clases de equivalencia y por μ la aplicación natural de M sobre M/ρ. Si M/ρ admite una estructura de variedad diferenciable (es decir, una topología y una estructura suave) tal que μ: M→N M/ρ sea una sumersión, entonces diremos que M/ρ con esta estructura es una variedad cociente de M.

Se puede probar que si M/ρ es una variedad cociente de M entonces M/ρ tiene la topología cociente y además su estructura diferenciable es única módulo difeomorfismo ([Br-CL], página 93).En este apéndice consideraremos variedades cocientes que resultan de relaciones de equivalencia inducidos por un grupo de transformaciones (ver [Br-CL], página 95):

<u>Definición.</u> Sean M una variedad diferenciable y G un grupo. El grupo G se dice que es un grupo de transformaciones sobre M si tenemos una función φ: GxM→M tal que

a) Para cada $g \in G$, la función $\varphi_g = \varphi(g,.)$: M→M es un difeomorfismo.

b) Para todo $g,h \in G$, $\varphi_{g.h} = \varphi_g \circ \varphi_h$.

Un caso particular es el de un grupo de difeomorfismo con un parámetro, tal como aparece en la definición 1.1.6..

Si es la identidad de G, entonces φ_e es la identidad de M.

El grupo G se dice que <u>discontinuo</u> si para todo $m \in M$, existe una vecindad U de m tal que $U \cap \varphi_g(U) = \phi$ para todo $g \neq e$. Un grupo de transformaciones G induce una relación de equivalencia ρ sobre M de la siguiente forma: $m\rho m'$ ssi existe $g \in G$ tal que $m = \varphi_g(m')$. El espacio cociente (con la topología cociente) lo denotamos por M/G.

<u>Proposición</u>. Sean M una variedad diferenciable de dimensión n, y G un grupo de transformaciones discontinuo sobre M. Entonces M/G se puede dotar de una estructura diferenciable de tal manera que M/G sea una variedad cociente de M, de dimensión n.

Demostración: Se verifica fácilmente que la aplicación natural μ: M$\rightarrow$M/G es abierta $\left(\text{pues } \mu^{-1}\big(\mu(U)\big) = \bigcup_{g \in G} \varphi_g(U)\right)$ y localmente inyectiva (porque G es discontinuo). Sea (U,φ) un sistema de coordenadas de M tal que $\mu|U$ sea 1-1 y definamos $f = (\mu|U)^{-1}$. Entonces podemos tomar como sistema de coordenadas en M/G a $\big(\mu(U),\ \psi o f\big)$; en efecto, es claro que el conjunto de estos sistemas de coordenadas cubre a M/G; falta verificar que son compatibles. Sean $\left(V_1 = \mu(U_1),\ \psi_1 o f_1^{-1}\right)$, $\left(V_2 = \mu(U_2),\ \psi_2 o f_2^{-1}\right)$ dos sistemas de coordenadas tales que $V_1 \cap V_2 \neq \phi$. Queremos demostrar que la aplicación $\psi_2 o f_2 o f_1^{-1} o\ \psi_1^{-1}$ es suave, para esto, basta demostrar que $f_2 o f_1^{-1}$ es suave en $f_1(V_1 \cap V_2)$. Sean $m_1 \in f_1\ (V_1 \cap V_2)$ y $m_2 = f_2 o f_1^{-1}(m_1)$, entonces m_1 es equivalente a m_2; luego $m_1 = \varphi_g(m_2)$ para algún $g \in G$ y el conjunto $U' = U_1 \cap \varphi_{g-1}(U_2)$ es un abierto que contiene a m_1. Además $U^1 \subseteq f_1\ (V_1 \cap V_2)$; pues dado $m' \in U'$ entonces $\mu(m') \in V_1$ y $\varphi_g(m') \in U_2$, luego $\mu(\varphi_g(m')) \in V_2$, pero $\varphi_g(m')$ es equivalente a m', y por lo tanto $\mu\big(\varphi_g(m')\big) = \mu(m') \in\ V_1 \cap V_2$, de donde $m' = f_1\big(\mu(m')\big) \in f_1(V_1 \cap V_2)$.

Ahora mostremos que $f_2 o f_1^{-1}\ |\ U' = \varphi_g\ |\ U'$ y esto completa la demostración de que M/G es una variedad diferenciable. Sea $m' \in U'$ entonces $\mu(m') \in V_1 \cap V_2$, y sea $m'' = f_2 o f_1^{-1}(m')$ $\big(m''$ es el único elemento de U_2 tal que $\mu(m'') = \mu(m')\big)$. Ahora $\varphi_g(m') \in U_2$ y $\mu\big(\varphi_g(m')\big) = \mu(m') = \mu(m'')$, luego $\varphi_g(m') = m''$.

Para terminar falta verificar que μ es una sumersión pero esto es trivial porque la expresión de μ en coordenadas locales $(U;\psi)$, $\big(\mu(U);\ \psi o f\big)$ es simplemente la identidad. □

Dado un espacio cociente X/ρ, donde X es un espacio topológico y ρ una relación de equivalencia en X, sea $F \subset M$ un conjunto que tiene exactamente un representante de cada clase de equivalencia de X/ρ. La clausura $\overline{F}$, de F en X se llama un __dominio fundamental__. Sea ρ' la relación de equivalencia que ρ induce sobre $\overline{F}$. Denotamos por $\overline{F}/\rho'$ el espacio cociente (con la topología cociente) y por $\overline{\mu}$ la aplicación natural de $\overline{F}/\rho'$ sobre X/ρ. $\overline{\mu}$ es claramente una biyección (la relación de equivalencia ρ' también la denotaremos por ρ).

__Lema__. Con la notación anterior, la aplicación $\overline{\mu}.\overline{F}/\rho \rightarrow X/\rho$ es continua.

Demostración: Sea $\mathcal{N}: \overline{F} \rightarrow \overline{F}/\rho$ la aplicación natural, y W un abierto de M/G. Entonces $\mathcal{N}^{-1}\left(\overline{\mu}^{-1}(W)\right) = \overline{F} \cap \mu^{-1}(W)$. □

Ahora si A es un subconjunto arbitrario de M, denotamos por $k_F(A)$ al siguiente conjunto: $\left\{g \in G: \varphi_g(A) \cap \overline{F} \neq \phi\right\}$. Un dominio fundamental $\overline{F}$ se dice que es __normal__ si para todo $m \in M$, existe una vecindad V de m tal que $k_F(V)$ es finito.

__Lema.__ Si $\overline{F}$ es un dominio fundamental normal entonces para todo $m \in M$ existe una vecindad U de m tal que $k_F(m) = k_F(U)$.

Demostración: Sea V una vecindad de m tal que $k_F(V)$ es finito, entonces $k_F(m) \subseteq k_F(V)$. Sean $g_1, \ldots g_r$ los únicos elementos de $k_F(V)$ que no están en $k_F(m)$. Entonces $\varphi_{g_1}(m), \ldots \varphi_{g_r}(m)$ están en el abierto $M-\overline{F}$. Sean $U_1, \ldots, U_r$ vecindades de m tales que $\varphi_{g_i}(U_i) \subseteq M-\overline{F}$, y, $U = U_1 \cap \ldots \cap U_r \cap V$. Entonces $g_1, \ldots g_r \not\in k_F(U)$ y $k_F(m) = k_F(U)$. □

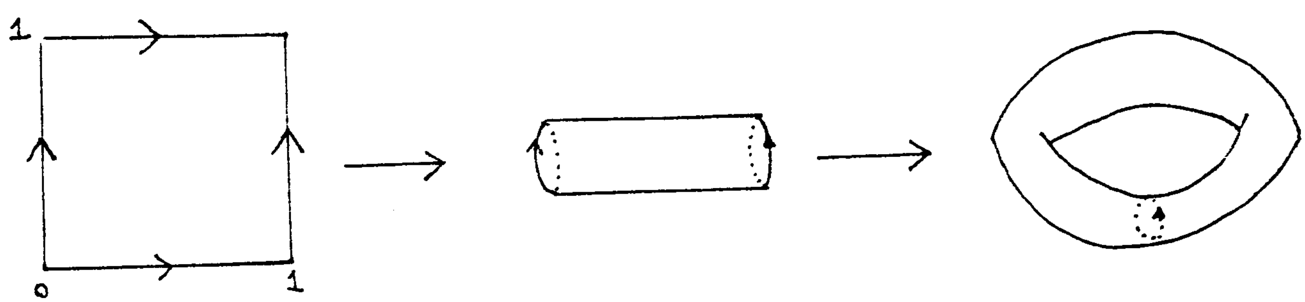
__Teorema__. Sean M una variedad diferenciable y G un grupo de transformaciones discontinuo. Si $\overline{F}$ es un dominio fundamental normal, entonces la aplicación natural $\overline{\mu}$: $\overline{F}/\rho \to M/G$ es un homeomorfismo.

Demostración: Basta demostrar que $\overline{\mu}^{-1}$ es continua. Es suficiente mostrar que para todo $p \in F$, $\overline{\mu}^{-1}$ es continuo en $\mu(p)$. Es decir, que para todo abierto W' alrededor de $\overline{\mu}^{-1}\left(\mu(p)\right) = \mathcal{N}(p)$ donde $\mathcal{N}: F \to F/\rho$ es la aplicación natural, existe un abierto U' alrededor de $\mu(p)$ tal que $\mu^{-1}(U') \subset W'$. Ahora bastará demostrar que existe una vecindad U de p tal que $\overline{\mu}^{-1}\left(\mu(U)\right) \subset W'$, y como $\mathcal{N}$ es sobreyectiva entonces es suficiente demostrar que $\mathcal{N}^{-1}\left(\overline{\mu}^{-1}\left(\mu(U)\right)\right) \subset \mathcal{N}^{-1}(W')$. Pero $\mathcal{N}^{-1}\left(\overline{\mu}^{-1}\left(\mu(U)\right)\right) = \overline{F} \cap \left(\mu^{-1}\left(\mu(U)\right)\right)$ luego hay que demostrar que $\overline{F} \cap \left(\mu^{-1}\left(\mu(U)\right)\right) \subseteq \mathcal{N}^{-1}(W')$.

Ahora $\mathcal{N}^{-1}(W')$ es abierto en $\overline{F}$, luego $\mathcal{N}^{-1}(W') = \overline{F} \cap V$ para un V abierto en M y por lo tanto queremos encontrar U abierto alrededor de $p \in F$ tal que $\overline{F} \cap \mu^{-1}\left(\mu(U)\right) \subseteq \overline{F} \cap V$ para V la vecindad de p determinada como antes. Sea $k_F(p) = \{g_1, \dots g_\alpha\}$, entonces $\varphi_{g_i}(p) \in \mathcal{N}^{-1}(W')$ porque W' es una vecindad en $\overline{F}/\rho$ de $\mathcal{N}(p)$ y por lo tanto $\varphi_{g_i}(p) \in V$.

Sean U_i, V' vecindades de p tales que $\varphi_{g_i}(U_i) \subseteq V$ y $k(p) = k(V')$. Y sea $U = U_1 \cap \dots \cap U_\alpha \cap V'$, luego $k_F(p) = k_F(U)$ y se sigue que $\overline{F} \cap \mu^{-1}\left(\mu(U)\right) \subseteq \varphi_{g_1}(U_1) \cup \dots \cup \varphi_{g_\alpha}(U_\alpha) \subseteq \overline{F} \cap V$. □

<u>Ejemplo 1.</u> (Toro) Sean $M = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ y $\varphi: \mathbb{Z}x\mathbb{Z}x\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida así: $\varphi\left((m,n,x,y)\right) = (x+m, y+n)$. Se comprueba fácilmente que G es un grupo de transformaciones que actua sobre M y es discontinuo. Podemos tomar como F a $[0,1] \times [0,1]$, luego $\overline{F} = [0,1] \times [0,1]$ y es claro que $\overline{F}$ es normal. Por el Teorema anterior $\overline{F}/\rho$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$. Pero $\overline{F}/\rho$ es el Toro (ver figura A1).



A.1. El Toro es el espacio que se obtiene de un cuadrado indentificando los lados como se muestra.

Ejemplo 2. (Botella de Klein). Sea $T=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ el Toro, como en ejemplo anterior. Entonces $\mathbb{Z}_2$ actua como un grupo de transformaciones discontinuo sobre T, definiendo

$$\varphi: \mathbb{Z}_2 \times T \to T$$
$$(0,m) \to m$$
$$(1,m) \to g(m)$$

donde $g: T \to T$ está definida así: $g\left([(x,y)]\right)= [(x+\frac{1}{2}, -y)]$ $\left([(\ ,\ )]\right.$ denota la clase de equivalencia de $\left.(\ ,\ )\right)$. No es difícil demostrar que g es un difeomorfismo, utilizando coordenadas locales para T. Mostremos que $\mathbb{Z}_2$ actua como un grupo discontinuo: Sea $m \in T$, queremos encontrar una vecindad U de m tal que $U \cap g(U)= \phi$. Ahora $m \neq g(m)$ y como el Toro es un espacio Hausdorff (pues es homeomorfo a $S^1 x S^1$) entonces existen vecindades Vm, Vg(m) tales que $Vm \cap Vg(m)= \phi$. Como g es continua entonces existe una vecindad U'_m de m tal que $g(U'_m) \subset Vg(m)$. Sea $U= Vm \cap U'_m$ entonces $U \cap g(U) \subseteq Vm \cap U' \cap Vg(m)= \phi$. Por último mostremos que $T/\mathbb{Z}_2$ es homeomorfo a la botellas de Klein (figura A.2).

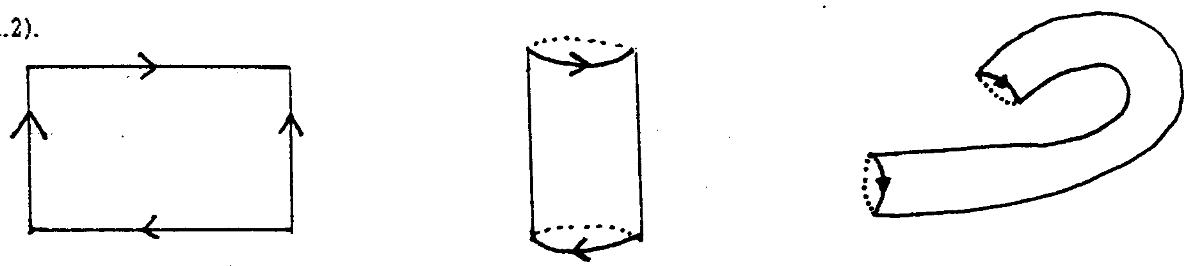


Figure A.2. La botella de Klein es el espacio que se obtiene identificando los lados de un cuadrado como se indica en la figura.

Recordemos que T es homeomorfo al espacio de la figura A.1. Sea $F \subset T$ el conjunto de todas las clases de equivalencia en T de los puntos que están en la región dibujada de la figura A.3.

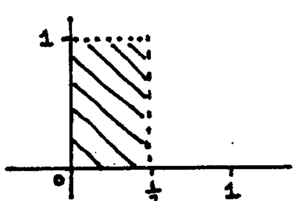


Figure A.3. $F=\left\{[(x,y)]: (x,y) \in [0,\frac{1}{2}) \times [0,1)\right\}$

No es difícil convencerse de que $\overline{F}$ es un dominio fundamental normal. Consideremos la imagen de $\overline{F}$ por el homomorfismo entre $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y el espacio de la figura A.1. El resultado es la región sombreada de la figura A.4.

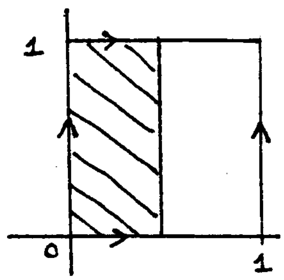


Figura A.4. Si h es el homomorfismo entre $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y el espacio de la figura A.1, entonces $h(\overline{F})$ es la región sombreada.

Luego $T/\mathbb{Z}_2$ es homeomorfo a un cociente de la región sombreada en la figura A.4. Ahora las identificaciones que hay que hacer en esta región son precisamente las que se muestran en la figura A.5, que es la definición usual de la Botella de Klein.

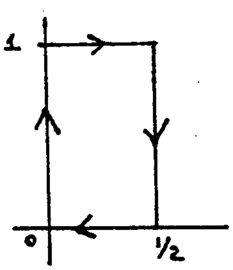


Figura A.5. La Botella de Klein es el espacio que se obtiene haciendo las identificaciones que se muestran en la figura.

__Ejemplo 3.__ (Espacio Proyectivo Real). Sean M= S^{n-1} y G= $\mathbb{Z}_2$. Entonces G actúa como un grupo de transformaciones discontinuo definiendo

$\varphi: \mathbb{Z}_2 \times S^{n-1} \to S^{n-1}$

$(0,x) \to x$

$(1,x) \to -x$

El espacio $S^{n-1}/\mathbf{Z}_2$ se llama el espacio proyectivo real $\mathbf{R}P^{n-1}$, y tiene dimensión n-1. Cuando n= 3 se muestra en la figura A.6.

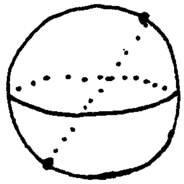


Figura A.6. $\mathbf{R}P^2$ se obtiene haciendo las identificaciones que se muestran en la figura.

<u>Ejemplo 4.</u> (Banda de Möbius). Sean M= $\mathbf{R}^2$, G= $\mathbf{Z}$. Entonces G actúa como un grupo de transformaciones discontinuo sobre M, definiendo:

$$\varphi: \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$
$$(m,x,y) \to \left(m+x,\ (-1)^m y\right)$$

Como Dominio Fundamental $\vec{F}$ podemos tomar a [0,1 x $\mathbf{R}$. Pero [0,1] x $\mathbf{R}$ es homeomorfo a [0,1] x (0,1), luego $\vec{F}/\rho$ es homeomorfo a [0,1] x $(0,1)/\rho$, que es precisamente la Banda de Möbius (figura A.7).

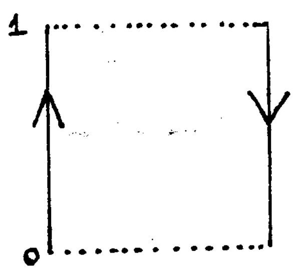


Figura A.7. la Banda Möbius es el espacio que se obtiene de [0,1] x (0,1) haciendo las identificaciones que se muestran en la figura.

APENDICE III. GEOMETRIA RIEMANNIANA

El objetivo de este apéndice es hacer una breve introducción a las conexiones lineales con el fin de definir la segunda derivada covariante de una función. Sean M una variedad diferenciable, $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de campos de vectores suaves sobre M y $C^{\infty}(M)$ el conjunto de funciones suaves de M en $\mathbb{R}$.

Definición. Una conexión lineal sobre M, es una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$

$$(X,Y) \to \nabla_X Y$$

que satisface las propiedades:

a) ∇ es bilineal

b) $\nabla_{fX} Y = f\ \nabla_X Y$ para todo $f \in C^{\infty}(M)$

c) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\,\nabla_X Y$ para todo $f \in C^{\infty}(M)$.

∇_X se llama la derivada covariante en la dirección x. En coordenadas locales $(U, x^1, \ldots x^n)$, ∇ está determinado sobre U por n^3 funciones suave T_{ij}^{k}, llamadas los símbolos de Christoffel asociados a ∇ con respecto a la carta $(U, x^1, \ldots x^n)$.

Dado ∇ se definen las funciones T_{ij}^{k} así: $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} T_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Definición. La torsión T_{∇} de la conexión ∇ es una aplicación $T_{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$

$$(X,Y) \to \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

donde [X,Y] es el paréntesis de Lie de X,Y.

La conexión ∇ se llama simétrica si $T_{\nabla} = 0$.

Definición. Dados $f \in C^{\infty}(M)$ y Xm, $Ym \in Mm$, definimos la segunda derivada covariante de f en la dirección de Xm, Ym con respecto ∇, como: $\frac{D^2}{DXm\ DYm} = Xm\ (Yf) - (\nabla_X Y)m\ (f)$, donde X y $Y \in \mathfrak{X}(M)$, son extensiones arbitrarias de Xm, Ym respectivamente.

Demostremos que $\frac{D^2 f}{DXm\ DYm}$ está bien definida. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ extensiones de Xm, Ym y coloquemos

$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x^i 2}$ en $(U, x^1, \ldots x^n)$ carta de M, C_o donde $a_i, b_i \in C^{\infty}(U)$. Entonces

$$Xm(Yf) = \sum_{j=1}^{n} Xm\left(b_j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(Xm\ (b_j) \frac{\partial f}{\partial x^j}|_m + b_j(m)\ Xm\ (\frac{\partial f}{\partial x^j})\right) \text{ y } (\nabla_X Y)m(f) = \sum_j\left(\nabla_X\, b_j \frac{\partial}{\partial x^j}\right)(f) =$$

$$\sum_j \left(Xm\ (b_j) \frac{\partial f}{\partial x^j}|_m + b_j(m)\ (\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^j})_m(f)\right) \text{ además } (\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^j})_m(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i(m)\ (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j})_m(f), \text{ luego}$$

$$\frac{D^2 f}{DXm\ DYm} = \sum_{j=1}^{n}\left(b_j(m)\ Xm(\frac{\partial f}{\partial x^j}) - b_j(m) \sum_{i=1}^{n} a_i(m)\ (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j})_m(f)\right)$$ Por lo tanto la segunda derivada covariante está bien definida.

Es fácil ver que la conexión ∇ es simétrica ssi $\frac{D^2 f}{DXm\ DYm} = \frac{D^2 f}{DYm\ DXm}$. El próximo teorema es uno de los resultados básicos de la Geometría Riemanniana. Aquí lo presentamos en una forma algebraica. Una presentación más geométrica se puede ver en [Mil].

Teorema Sea M una variedad diferenciable con estructura de Riemann $\langle\ .\ \rangle$ sobre M. Entonces existe una única conexión lineal sobre M con las siguientes propiedades:

a) $T_{\nabla} = 0$

b) $X(\langle Y,Z\rangle) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración: Después de un cálculo largo pero fácil se obtiene que si ∇ existe con las propiedades a),b), entonces:

$$<\nabla_x y,z> = \frac{1}{2}[x<y,z> + y<x,z> - z<x,y> + <[z,x], y> + <[z,y], x> + <[x,y], z>] \qquad (*)$$

para todo $x,y,z \in \mathfrak{X}(M)$.

Como $< , >$ es un producto no-degenerado, y $<\nabla_x y,z,>$ es lineal en z, esto demuestra que z es única. Para demostrar la existencia de ∇ utilizamos de nuevo la linealidad de $<\nabla_x y,.>$. Dado $z \in \mathfrak{X}(M)$, definimos $\nabla_x y$ como el único campo de vectores tal que la ecuación (*) se caumpla ("toda función lineal tiene un vector que la representa"). □

Esta única conexión lineal se llama la <u>conexión de Riemann</u> de M ó la conexión de Levi-Civita.

Calculemos ahora los símbolos de Christoffel de esta conexión: sea $(U, x^1,\dots x^n)$ una carta de M, entonces:

$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{\alpha=1}^{n} T_{ij}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, y consideremos el producto $<\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}> = \sum_\alpha T_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k}$, donde $g_{\alpha k} = <\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^k}>$, luego $\sum_\alpha T_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$, porque $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}] = 0$. Sea ahora (g^{hk}) la matriz inversa de (g_{hk}), entonces multiplicando por g_{kh} y sumando sobre k, se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} T_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k}\, g^{kh} = \sum_{\alpha=1}^{n} T_{ij}^{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{n} g_{\alpha k}\, g^{kh}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} T_{ij}^{\alpha} \delta_\alpha^h = T_{i,j}^{h} \quad \text{luego}$$

$$T_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} g^{\alpha k}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{j\alpha} + \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{(\alpha)}}\right). \qquad (*)$$

Finalmente si $M = \mathbb{R}^n$ y tomamos como estructura de Riemann para $\mathbb{R}^n$, el producto interno usual, entonces $g_{ij} = \delta_{ij}$, y por lo tanto utilizando la ecuación (*) vemos que los símbolos de Christoffel de la conexión de Riemann en $\mathbb{R}^n$ son todos nulos. Se sigue en este caso que $\nabla = 0$ y que $\dfrac{D^2 f}{Dx^i\, Dx^j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j}$.

APENDICE IV. SOBRE EL TEOREMA 4.4

En este apéndice continuamos con la demostración del Teorema 1.4.4. Faltaba mostrar que $\bar{f}$ es una equivalencia. La idea ahora es aplicar el siguiente Teorema de Whitehead a la función $\bar{f}$.

Teorema ([Wh.J]$_1$, página 215) Sean X, Y espacios dominados por un CW-Complejo (es decir que tienen el tipo de homotopía de un CW-Complejo). Una aplicación F: $X \to Y$ es una equivalencia homotópica ssi f induce isomorfismos de los grupos de homotopía en todas las dimensiones.

Para aplicar este teorema a $\bar{f}$ tenemos que primero verificar que k y M son dominados por CW-Complejos. k está dominado por el mismo y es un hecho conocido que toda variedad diferenciable está dominada por un CW-Complejo (sinembargo no conozco una referencia precisa).

Ahora introducimos rápidamente los grupos de homotopía de un espacio topológico. Sean $I^n = \{(X_1, \ldots X_n) \in \mathbb{R}^n\colon 0 \leq X_i \leq 1$ para todo $i\}$ e $\dot{I}$ la frontera de I^n. Dado un espacio topológico X, $x_0 \in X$ y f,g: $(I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_0)$, decimos que f es equivalente a g si existe una homotopía entre f y g relativa a $\dot{I}^n$. El conjunto de clases de equivalencia lo denotamos por $\Pi_n(X, x_0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definiremos ahora una suma en $\Pi_n(X,x_0)$. Dados [f], $[g] \in \Pi_n(X,x_0)$ donde [f] denota la clase de equivalencia de f, definimos su suma [f] + [g] como la clase de f+g: $(I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_0)$ donde f+g es la función:

$$f+g(x_1, \ldots x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \ldots x_n) & \text{si } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2x_1 - 1, x_2 \ldots x_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

se puede demostrar que [f] + [g] queda bien definida y que con esta suma $\Pi_n(X,xo)$ es un grupo para cada $n \in \mathbb{N}$, llamado el n-ésimo grupo de homotopía de X.

Supongamos ahora que tenemos una aplicación continua $f\colon X \to Y$, donde X y Y son espacios topológicos. Sea $x_0 \in X$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, f induce un homomorfismo $f_{n*} : \Pi_n(X, x_0) \to \Pi_n\big(Y, f(x_0)\big)$ definido por $f_{n*}([h]) = [f \circ h] \in \Pi_n\big(Y, f(x_0)\big)$. Si f es una equivalencia homotópica, entonces f_{n*} es un isomorfismo. Con estas observaciones, no es difícil ver que $\overline{f}$ induce isomorfismos $\overline{f}_{n*}$ (recordemos que $\overline{f}$ restringido a cada k_i, es una equivalencia homotópica) en todas las dimensiones.